

Milena Chmiel

Studentka III roku matematyki
Studenckie Koło Naukowe „Rozmaitości”
Uniwersytet Jana Kochanowskiego
w Kielcach

Recenzent: dr Michał Stachura

Kiedy zombie atakują. Model matematyczny wybuchu infekcji zombie.

Streszczenie:

Obecnie zombie są jedną z najbardziej popularnych postaci w popkulturze i często utożsamiane są z przyczynami wybuchu wojen albo epidemii.

Bazując na biologicznych założeniach oraz popularnych filmach można stworzyć model matematyczny wybuchu infekcji zombie. Model podstawowy opiera się na równowadze i stabilności panującej w naturze. Inne wyniki otrzymamy kiedy uwzględnimy okres ukrytego efektu zombie, tzn. ludzie są „zarażeni”, choć o tym nie wiedzą dopóki nie umrą. Kolejny model bierze pod uwagę wpływ kwarantanny oraz leczenia. Ostatnia teoria koncentruje się na intensywnej redukcji zombie oraz jej wpływie na rozwój ekspansji tych stworzeń.

Z przedstawionych modeli wynika, że tylko zastosowanie agresywnej walki z zombie zatrzyma ich ekspansję.

Słowa kluczowe: zombie, infekcja, epidemia, model matematyczny.

Literatura:

1. Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 133-150.
2. Strona internetowa: <http://prezi.com/qvmyl1h4zyd/when-zombies-attack-mathematical-modelling-of-an-outbreak-of-zombie-infection/> (data: 25.03.2012).
3. Strona internetowa: <http://ertai.pl/blog/2009/08/21/matematyka-dla-zombi/> (data: 25.03.2012).

Wstęp

Naukowcy zajmujący się modelowaniem przebiegu epidemii chorób zakaźnych opracowali szereg modeli dla plagi zombie. Otrzymane przez nich wyniki były zaskakujące. W swoim referacie przedstawię modele wybuchu epidemii zombie oraz otrzymane przez naukowców rezultaty.

Historie o zombie wywodzą się z afro-karaibskiego systemu duchowych wierzeń Voodoo i opisują one ludzi kontrolowanych przez potężnego czarownika. Według tych wierzeń zombie to wskrzeszone ludzkie zwłoki, które odżywiają się ludzkim mięsem.

Istnieje kilka możliwych wy tłumaczeń słowa „zombie”. Jednym z nich, jest pochodzenie od karaibskiego słowa „jumbie”, oznaczającego ducha. Innym możliwym słowem źródłowym jest „nzambi”, którym w Kongo określa się ducha zmarłej osoby. Według słownika Merriam – Webster, słowo „zombie” pochodzi od słowa „zonbi” używanego w Luizjanie lub w Haiti. Według kultury kreolskiej, zonbi reprezentuje osobę, która zmarła, a następnie została przywrócona do życia bez zdolności mowy lub wolnej woli.

Wyznawcy Voodoo wierzą, że martwy człowiek może zostać ożywiony przez czarownika. Po wskrzeszeniu, zombie nie posiadają własnej woli i pozostają pod kontrolą. Mówi się, że czarodziej używa „proszku zombie” do procesu „zombifikacji”. Według wierzeń proszek ten zawiera niezwykle silne neurotoksyny, które tymczasowo paraliżują układ nerwowy człowieka i wprowadzają go w stan hibernacji. Podczas tego stanu główne narządy, takie jak serce i płuca, oraz wszystkie funkcje życiowe, działają na minimalnym poziomie. Brak dopływu tlenu do mózgu powoduje przemianę człowieka w zombie.

Nowocześni zombie, czyli przedstawieni w książkach, filmach lub grach, są odmienni od tych ukazanych przez Voodoo. Na podstawie filmu Romero „Noc żywych trupów”, są oni przedstawieni jako bezmyślne potwory, które nie czują bólu i mają ogromny apetyt na ludzkie mięso. Ich celem jest zabijać, jeść lub zarażać ludzi. „Nieumarli” poruszają się krótkimi i nieregularnymi krokami oraz pokazują oznaki fizycznego rozkładu (np.: ich ciało gnije, mają przebarwione oczy i otwarte rany). Nowocześni zombie często są związani z apokalipsą, gdzie cywilizacja ludzi może zostać zniszczona przez plagę nieumarłych. Niestety, ani filmy, ani gry komputerowe, nie wyjaśniają powstania pierwszych zombie. Niektórzy uważają, że istoty te powstały w wyniku promieniowania, inni – narażenia na działanie pyłu wirusowego, jeszcze inni, że w wyniku ukąszenia genetycznie zmienionych pszczół.

Kiedy osoby podatne na zarażenie, zostają ugryzione przez zombie, to w miejscu ukąszenia tworzą się otwarte rany, w których znajduje się ślina zombie. Miesza się ona z krwią ugryzionego powodując infekcję i rozpoczynając przemianę człowieka w zombie.

Zombie, które wybrano do rozważań, prezentują model klasyczny, to znaczy mają następujące cechy: wolno się poruszają, są kanibalami i są „nieumarli”. Istnieją również inne odmiany zombie, które posiadają więcej odmiennych cech. Jednak ze względu na ich złożoność, osobnicy ci nie byli brani pod uwagę.

Model podstawowy

W modelu podstawowym, można wyróżnić trzy klasy, na które została podzielona populacja:

- „podatni”, czyli osoby podatne na zarażenie (S - oznacza ich liczbę),
- zombie (Z - oznacza ich liczbę),
- „usunięci”, składają się z osób, które umarły śmiercią naturalną lub wskutek ataku zombie (R - oznacza ich liczbę).

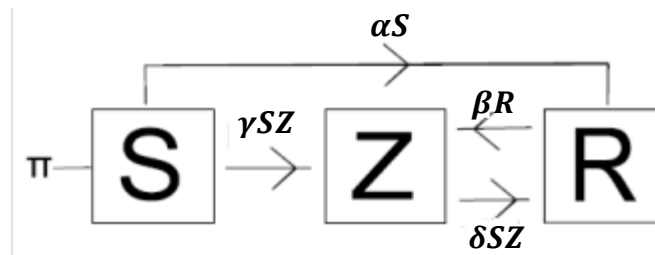
Osoby podatne mogą umrzeć poprzez śmierć naturalną, nie związaną z zombie (wskaźnik tej śmiertelności reprezentuje parametr α). Ludzie z klasy „usuniętych” mogą zostać wskrzeszeni i zamienić się w zombie (wskaźnik ten reprezentuje parametr β). „Podatni” mogą ulec przemianie poprzez ugryzienie (wskaźnik przemiany reprezentuje parametr γ). Tylko ludzie mogą się zarazić poprzez kontakt z zombie i tylko wtedy gdy zombie mają ochotę na ludzkie mięso. Zatem zombie mogą pochodzić z dwóch źródeł:

- z niedawno zmarłego, usuniętego z grupy,
- z „podatnego”, który miał kontakt z zombie.

Ponadto zakłada się, że wskaźnik urodzeń jest stały, i oznaczamy go π . Zombie mogą przejść do klasy „usuniętych”, jeśli zostaną zniszczeni, czyli w wyniku usunięcia im głowy lub zniszczenia mózgu (wskaźnik przejścia reprezentuje parametr δ). Przyjmuje się także, że zombie nie atakują i nie zabijają innych zombie.

Założenia te prowadzą do następujących równań:

$$\begin{aligned} S' &= \pi - \gamma SZ - \alpha S \\ Z' &= \gamma SZ + \beta R - \delta SZ \\ R' &= \alpha S + \delta SZ - \beta R \end{aligned}$$



Rys.1. Diagram ilustrujący model podstawowy.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 136.

Zatem możemy zapisać, że $S' + Z' + R' = \pi$, oraz $S + Z + R \rightarrow \infty$, o ile $\pi \neq 0$. Oczywiście, $S \rightarrow \infty$, co w rezultacie doprowadzi do upadku cywilizacji, wiele ludzi umrze lub stanie się zombie.

Jeśli założymy, że wybuch epidemii nastąpi w krótkim okresie czasu, to możemy zignorować wskaźnik urodzeń i zgonów. Zatem $\pi = 0$. Wstawiając $\pi = 0$ do powyższych równań, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -\gamma SZ &= 0 \\ \gamma SZ + \beta R - \delta SZ &= 0 \\ \delta SZ - \beta R &= 0 \end{aligned}$$

Z pierwszego równania otrzymamy $S = 0$ lub $Z = 0$. Zatem dla $S = 0$ mamy równowagę pomiędzy „podatnymi” i „usuniętymi”, czyli $(\bar{S}, \bar{Z}, \bar{R}) = (0, \bar{Z}, 0)$. Natomiast dla $Z = 0$ otrzymamy sytuację, gdy zagrożenie zombie nie istnieje, $(\bar{S}, \bar{Z}, \bar{R}) = (N, 0, 0)$. Te równania pokazują, że niezależnie od zaistniałej równowagi, współistnienie ludzi i zombie jest niemożliwe.

Gdy obliczymy jacobian dla $S = 0$, otrzymamy

$$\det(J - \lambda I) = -\lambda\{\lambda^2 + [\beta - (\gamma - \delta)N]\lambda - \gamma\beta N\}.$$

Ponieważ wszystkie wartości są ujemne, to stąd wynika, że gdy nastąpi wybuch infekcji, zombie najprawdopodobniej zarażą każdego.

Natomiast jacobian dla $Z = 0$ wygląda następująco:

$$\det(J - \lambda I) = -\lambda(-\gamma\bar{Z} - \lambda)(-\beta - \lambda).$$

Równanie to ma zawsze pierwiastek dodatni, dlatego też równowaga ta jest niestabilna i istnieje minimalne zagrożenie wybuchu epidemii.

Model utajonego zarażenia

Podstawowy model wybuchu epidemii będzie wyglądał inaczej, jeśli uwzględnimy w nim klasę osób zakażonych, wyodrębnioną z „podatnych” na infekcję. Przyjmuje się okres, około 24 godzin od ugryzienia, po którego upływie organizm człowieka ulega przemianie w zombie.

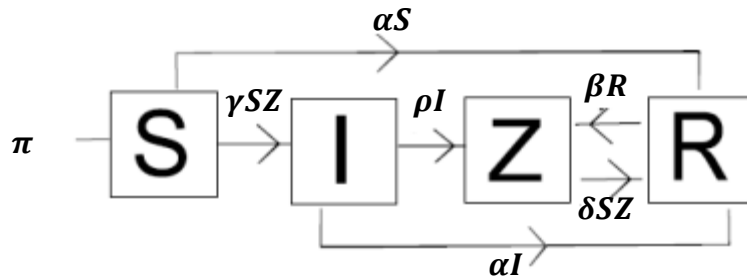
Po uwzględnieniu klasy zakażonych, w modelu podstawowym zachodzą następujące zmiany:

- „podatni” najpierw przechodzą do klasy zakażonych i pozostają tam przez pewien okres czasu,

- następnie zakażeni osobnicy albo umierają śmiercią naturalną zanim zostaną zombie, albo ulegają transformacji.

Zatem otrzymujemy tzw. model SIZR.

$$\begin{aligned}S' &= \pi - \gamma SZ - \alpha S \\I' &= \gamma SZ - \varrho I - \alpha I \\Z' &= \varrho I + \beta R - \delta SZ \\R' &= \alpha S + \varrho I + \delta SZ - \beta R\end{aligned}$$



Rys.2. Model SIZR: model podstawowy uzupełniony o utajone zakażenie.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 139.

Tak jak poprzednio, jeśli uwzględnimy zmienną liczbę urodzeń i zgonów, cywilizacja ulegnie zagładzie zombie. Zatem należy przyjąć krótki okres wybuchu epidemii oraz $\pi = 0$. Wówczas z pierwszego równania otrzymamy, że $S = 0$ lub $Z = 0$. Postępując analogicznie, jak w modelu bazowym, otrzymamy dwa stany równowagi:

$$Z = 0 \Rightarrow (\bar{S}, \bar{I}, \bar{Z}, \bar{R}) = (N, 0, 0, 0),$$

$$S = 0 \Rightarrow (\bar{S}, \bar{I}, \bar{Z}, \bar{R}) = (0, 0, \bar{Z}, 0).$$

Dlatego też współistnienie ludzi i zombie znowu jest niemożliwe.

W pierwszym przypadku jacobian wygląda następująco:

$$\det(J(N, 0, 0, 0) - \lambda I) = -\lambda[-\lambda^3 - (\varrho + \beta + \delta N)\lambda^2 - (\varrho\delta N + \varrho\beta - \varrho\gamma N)\lambda + \varrho\beta\gamma N].$$

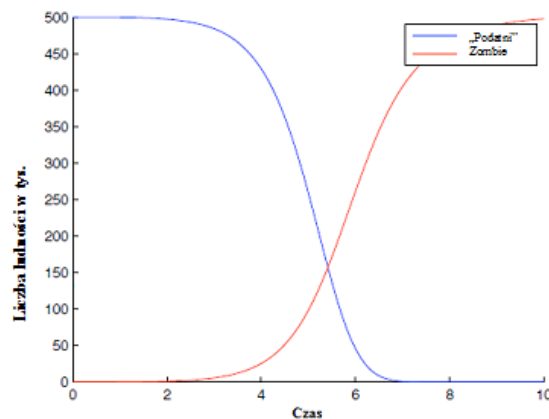
Gdy $\varrho\beta\gamma N > 0$, jacobian ten ma same dodatnie wartości własne, to równowaga „bez osobników chorych” jest niestabilna i istnieje możliwość wybuchu infekcji.

W drugim przypadku, otrzymujemy następujący jacobian:

$$\det(J(0, 0, \bar{Z}, 0) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\gamma\bar{Z} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\bar{Z} & -\varrho - \lambda & 0 & 0 \\ -\delta\bar{Z} & \varrho & -\lambda & \beta \\ \delta\bar{Z} & 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{bmatrix}$$

Wartości własne są równe: $0, -\gamma\bar{Z}, -\varrho, -\beta$ i wszystkie są ujemne. Pociąga to za sobą wniosek, że nawet gdy uwzględnimy okres utajonego zarażenia, to zombie są w stanie przejąć kontrolę nad ludźmi.

Poniższy wykres pokazuje, jak zmienia się liczba ludności w zależności od czasu, jaki upłynął od wybuchu epidemii. Można z niego odczytać, że już po 7 dniach żaden człowiek nie będzie żywy.



Rys.3. Zależność liczby ludności od czasu jaki upłynął od wybuchu epidemii.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 140.

Model kwarantanny

W celu powstrzymania wybuchu infekcji można przeprowadzić częściową kwarantannę osób zarażonych. Zatem w tym modelu należy założyć, że osoby, które poddane są kwarantannie, jako odizolowane nie mogą zarażać kolejnych ludzi. Zmiany, które należy wprowadzić do poprzedniego modelu są następujące:

- Obszar kwarantanny obejmuje tylko zakażonych członków populacji lub zombie, (tempo przyrostu zakażonych członków populacji oznaczamy κ , natomiast przyrost zombie – σ)
- Istnieje możliwość ucieczki osób poddanych kwarantannie, ale każdy kto będzie się starał wydostać na wolność, zostanie zabity (wskaźnik uciekinierów reprezentuje parametr τ),
- Osoby zabite są przemieszczane do klasy „usuniętych”, gdzie mogą zostać ożywieni jako „wolne” zombie.

Równania tego modelu są zatem następujące:

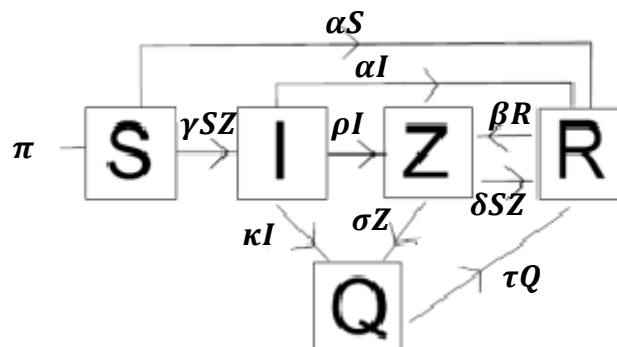
$$S' = \pi - \gamma SZ - \alpha S$$

$$I' = \gamma SZ - \rho I - \alpha I - \kappa I$$

$$Z' = \rho I + \beta R - \delta SZ - \sigma Z$$

$$R' = \alpha S + \rho I + \delta SZ - \beta R + \tau Q$$

$$Q' = \kappa I + \sigma Z - \tau Q.$$



Rys.4. Diagram modelu uwzględniającego kwarantannę.

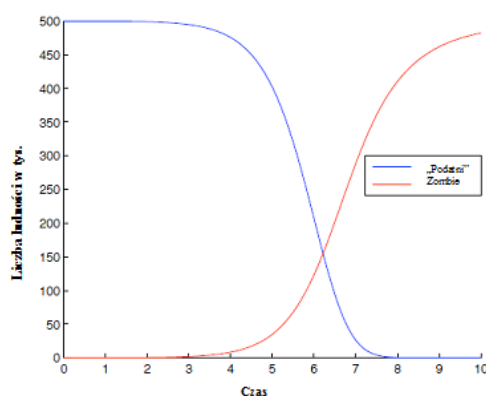
Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 141.

Dla $\pi = 0$, czyli gdy wybuch infekcji następuje w krótkim czasie, otrzymujemy dwa stany równowagi: $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{Z}, \bar{R}, \bar{Q}) = (N, 0, 0, 0, 0), (0, 0, \bar{Z}, \bar{R}, \bar{Q})$. W tym przypadku w celu analizy stabilności należy określić stosunek reprodukcyjny R_0 , który ma tę własność, że jeśli $R_0 > 1$, to wybuch infekcji się utrzyma, natomiast dla $R_0 < 1$ wybuch będzie zastopowany. Uwzględniając założenia tego modelu, R_0 można zapisać następująco: $R_0 = \frac{\gamma N \varrho}{(\varrho + \kappa)(\delta N + \sigma)}$.

Wynika stąd, że okres bez zarażeń będzie występował tylko wtedy, gdy $R_0 < 1$. A to może być osiągnięte poprzez wydłużenie czasu kwarantanny osób zarażonych i zombie. Jeśli natomiast populacja jest duża, to: $R_0 \approx \frac{\gamma \varrho}{(\varrho + \kappa)\delta}$. Gdy $\gamma > \delta$, czyli gdy zombie zarażają szybciej, niż ludzie mogą je zabić, to zatrzymanie wybuchu infekcji zależy od początkowego stadium zakażenia.

Jednak kwarantanną nie można objąć dużej liczby zakażonych osób, ponieważ jest to nierealne ze względów technicznych i ekonomicznych. Dlatego σ i κ nie mogą przyjmować dużych wartości. W konsekwencji $R_0 > 1$.

Na poniższym wykresie został przedstawiony stosunek liczby ludności w zależności od czasu jaki minął od pierwszego zarażenia. W rezultacie, kwarantanna tylko nieco opóźnia moment całkowitej zagłady ludności. Nadal można się spodziewać tylko dwóch możliwych wyników: albo zombie zostaną wykorzenieni, albo przejmą całkowitą kontrolę nad ludźmi.



Rys.5. Zależność liczby ludności od czasu jaki upłynął od wybuchu epidemii w modelu z uwzględnieniem okresu kwarantanny.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 142.

Model uwzględniający leczenie

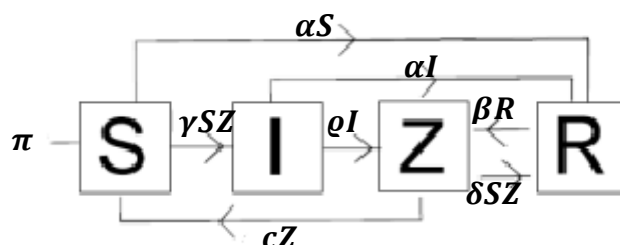
W modelu tym zakładamy, że jesteśmy w stanie szybko wyprodukować lekarstwo na wirus zombie, które umożliwi ugryzionym powrót do życia takiego jak przed zarażeniem. Jednak, osoby poddane leczeniu, nadal mogą być podatne na infekcje zombie, dlatego też leczenie nie zapewnia całkowitej odporności.

Założenia, które należy uwzględnić w tym modelu są następujące:

- Ponieważ jest leczenie, nie trzeba stosować kwarantanny,
- Lekarstwo pozwoli powrócić zombie do ich pierwotnej postaci bez względu na, sposób w jaki zostali zarażeni,
- Osoby uzdrowione nadal są podatne na atak zombie, zatem lekarstwo nie daje całkowitej odporności.

Zatem w tym modelu otrzymujemy następujące równania:

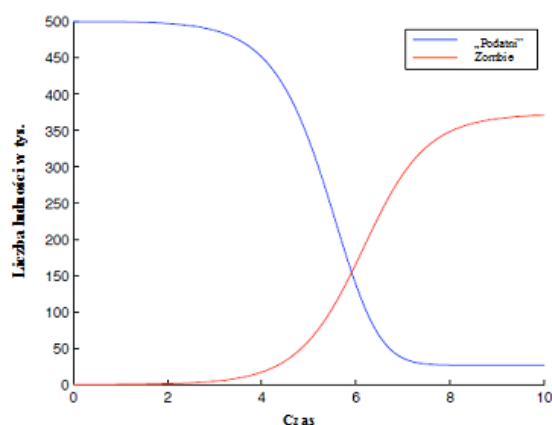
$$\begin{aligned} S' &= \pi - \gamma SZ - \alpha S + cZ \\ I' &= \gamma SZ - \varrho I - \alpha I \\ Z' &= \varrho I + \beta R - \delta SZ - \sigma Z \\ R' &= \alpha S + \alpha I + \delta SZ - \beta R. \end{aligned}$$



Rys.5. Diagram modelu uwzględniającego leczenie.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 143.

Tak jak dla poprzednich modeli przyjmujemy $\pi = 0$. Dla $Z = 0$ otrzymujemy zwykłą równowagę „bez chorych” $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{Z}, \bar{R}) = (N, 0, 0, 0)$. Jednak, uwzględniając w klasie „podatnych”, osoby, które zostały wyleczone (oznaczamy je cZ), otrzymujemy również endemiczną równowagę $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{Z}, \bar{R}) = (\frac{c}{\gamma}, \frac{c}{\varrho} \bar{Z}, \bar{Z}, \frac{\delta c}{\beta \gamma} \bar{Z})$. Jej jacobian jest następujący: $\det(J(\bar{S}, \bar{I}, \bar{Z}, \bar{R}) - \lambda I) = -(\gamma \bar{Z} - \lambda) \left\{ -\lambda \left[\lambda^2 + \left(\varrho + \frac{\delta c}{\gamma} + c + \beta \right) \lambda + \frac{\beta \delta c}{\gamma} + \frac{\varrho \delta c}{\gamma} + \varrho \beta + c \beta \right] \right\}$. Ponieważ, wyrażenie kwadratowe ma tylko współczynniki dodatnie, nie posiada ono dodatnich wartości własnych. Stąd współistnienie ludzi i zombie jest możliwe, a równowaga ta jest stabilna. Przykładową równowagę tego typu przedstawia rys.6. W tym przypadku tylko niewielka część populacji jest w stanie koegzystować wspólnie z zombie.



Rys.6. Zależność liczby ludności w zależności od czasu jaki upłynął od wybuchu epidemii w modelu uwzględniającym leczenie.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 145.

Model „impulsywnego wykorzenia”

Metoda ta polega na atakowaniu i niszczeniu zombie. Jednak ze względu na ograniczoność środków, którymi można się posłużyć, należy założyć, że trzeba atakować więcej niż jeden raz, a przy każdym ataku próbować niszczyć więcej zombie.

Uwzględniając postać modelu podstawowego i powyższe założenia, otrzymamy następujące równania:

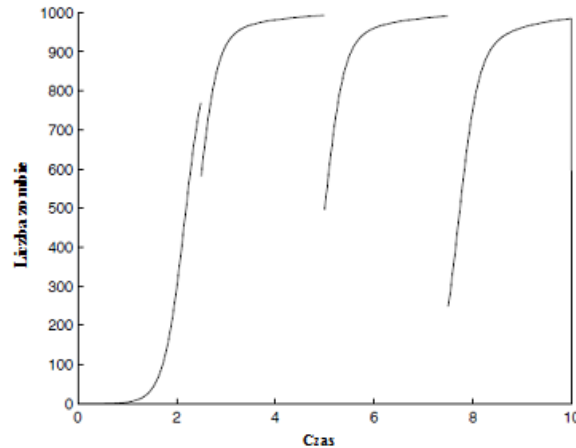
$$S' = \pi - \gamma SZ - \alpha S$$

$$Z' = \gamma SZ + \beta R - \delta SZ$$

$$R' = \alpha S + \delta SZ - \beta R$$

$$\Delta Z = -knZ$$

gdzie $k \in (0,1]$ i jest to stosunek zabitych zombie do wszystkich atakowanych. Te rezultaty są przedstawione na poniższym wykresie.



Rys.7. Zależność liczby zombie od czasu rozpoczęcia ataków.

Źródło: Munz P., Hudea I., Imad J., Smith R. J., 2009, When zombies attack!: mathematical modeling of an outbreak of zombie infection. [w:] Infectious Disease Modelling Research Progress, s. 145.

Na wykresie, przyjęto $k = 0,25$, a wartości pozostałych parametrów wynoszą $(\delta, \gamma, \beta, \alpha) = (0,0075; 0,0055; 0,09; 0,0001)$. Zatem po 2 i pół dniach, 25% zombie jest zniszczonych, po 5 dniach – 50%, po 7 i pół dniach – 75%, a po 10 dniach – 100% zombie ulega zniszczeniu.

Wnioski

Z powyżej przedstawionych modeli wynika, że wybuch infekcji zombie może być katastrofalny dla całej cywilizacji. Agresywna kwarantanna może wyeliminować infekcję, ale w praktyce jest to mało prawdopodobne. Lekarstwo pozwala przetrwać tylko części populacji, która musi współistnieć z zombie. Jedynie tylko częste ataki, z coraz większą siłą, spowodują całkowitą likwidację zombie.

Ponadto dla tych rezultatów przyjęliśmy, że czas wybuchu infekcji jest krótki i pominęliśmy wskaźniki urodzeń i zgonów. Jednak jeśli weźmiemy te wskaźniki pod uwagę, to wybuch infekcji zombie doprowadzi do upadku cywilizacji. Stanie się tak dlatego, że nowi ludzie będą stanowić nowe obiekty do zakażenia przez zombie. Zatem aby wyeliminować infekcję, musimy działać szybko i zdecydowanie.

Gdyby plaga zombie wystąpiła naprawdę, ludzkość nie miałaby szans przeżycia. W powyższych modelach założyliśmy, że nasza populacja liczy 500 tysięcy ludzi. W modelu podstawowym występują tylko dwie sytuacje, albo wszyscy są zombie, albo nikt nie jest zarażony. Po uwzględnieniu fazy utajonego zarażenia, upadek rozważanej populacji, nastąpi po 7 dniach. Gdy zastosujemy kwarantannę, to zagłada zostanie tylko opóźniona o dzień lub dwa. Model uwzględniający leczenie pozwala współistnieć ludziom i zombie. Tylko aktywna walka z tymi istotami pozwala zastopować zagładę ludzkości.