

Milena Chmiel

Studentka I roku matematyki, studia II^o
Studenckie Koło Naukowe „Rozmaitości”
Uniwersytet Jana Kochanowskiego
w Kielcach

Recenzent: dr Michał Stachura

Sztuka przemawiania językiem matematyki

Streszczenie:

Wydawać by się mogło, iż sztuki plastyczne i matematyka to dwie zupełnie różne dziedziny. Z jednej strony twórcza działalność artystyczna zmierzająca do uchwycenia piękna świata, z drugiej zaś surowość wzorów i reguł, jednoznacznie prowadzących do uzyskania konkretnego wyniku.

A jednak dzięki matematyce powstają struktury i wzory, którym wielu artystów mogłoby bić pokłon i spoglądać na nie z zachwytem. Jednak niewielu ludzi ma talent do łączenia matematyki i sztuk plastycznych jaki posiadał Maurits Cornelis Escher. W swoich grafikach potrafił w sposób perfekcyjny wykorzystywać proste struktury, takie jak trójkąty paraboliczne, wielościany czy wstęgę Möbiusa, ale także posługiwał się tak złożonymi pojęciami jak geometria Łobaczewskiego, teselacje, model Poincarégo czy efekt Droste'a. Nazwisko Eschera może wydawać się mało znane, ale większość z nas widziała jego dzieło pt.: „Wodospad”.

Obrazy Eschera są znakomitym przykładem ukazania piękna matematyki umiejętnie wykorzystanej w sztuce.

Słowa kluczowe: teselacje, Escher, parkietaże, figury niemożliwe, model Poincarégo

Art that appeals language of mathematics

Streszczenie:

It would seem that the fine arts, and mathematics are two completely different fields. On the one hand, the creative arts activities aiming to capture the beauty of the world, on the other hand the severity of patterns and rules, clearly leading to a particular outcome.

But thanks to the mathematics structures and patterns are formed, which many artists could beat bow and look at them in awe. However, few people have the talent to combine math and art I have Maurits Cornelis Escher. In his graphic could be used as a perfect simple structure, such as parabolic triangles, polygons or Möbius strip, but also used the complex concepts such as geometry Lobachevsky, tessellations, the Poincaré model Droste'a effect. Escher's name may appear to be little known, but most of us have seen his work: "Waterfall".

Escher's images are a great example of the beauty of mathematics year skillfully used in the art.

Czy matematyka może stać się natchnieniem dla plastyka? Czy może być narzędziem pomagającym przekazać myśli oraz pomysły zrodzone w ludzkim umyśle? Czy może być środkiem wyrazu w wyrażaniu stosunku do świata i w ukazaniu jego piękna? Matematyka, malarstwo, grafika i inne dziedziny sztuki są tylko rzekomo odległe od siebie. Wędrując ścieżkami kultur różnych cywilizacji, odwiedzając galerie malarstwa i muzea, odnajdujemy różne dzieła sztuki, które wykazują odniesienie do matematyki. Niekiedy artysta wykorzystywał wiedzę matematyczną w sposób całkowicie intuicyjny, innym razem inspiracje matematyczne stanowią element dekoracyjny i użytkowy, ale może być ona również głównym narzędziem do tworzenia dzieła artystycznego. Na całym świecie znana jest zarówno sztuka islamu, jak i twórczość Mauritsa Cornelisa Eschera – holenderskiego dziewiętnastowiecznego grafika, który posiadał wyjątkową wyobraźnię geometryczną. Zatem, czy można tworzyć własne, fantastyczne światy, bawiąc się matematyką, kształtem oraz geometrią?

Celem niniejszego referatu jest ukazanie przenikania się matematyki i sztuki na wybranych przykładach, jak również udzielenie odpowiedzi na postawione wyżej pytania.

Wyjątkowość sztuki Eschera

„Jest to zapewne najbardziej kuriozalne dzieło, absolutnie niepowtarzalne, jakiego żaden inny artysta grafik na świecie (z całym szacunkiem) Ci nie zaprezentuje. Nie brzmi to zbyt skromnie, ale cóż na to poradzę. Takie to właśnie jest.” Tak pisał Escher o swojej sztuce w liście do przyjaciela. W tym zdaniu nie ma żadnej przesady, ponieważ wyjątkowość jego grafik i obrazów jest oczywista nawet dla tych, którzy ze sztuką mają mało wspólnego.

Jednym z najbardziej znanych drzeworytów tego artysty jest „Wstęga Möbiusa”. Samo pojęcie wstęgi Möbiusa określa tzw. dwuwymiarową zwartą rozmaitość topologiczną zanurzoną w przestrzeni trójwymiarowej, którą można uzyskać sklejając taśmę końcami „na odwrót”. Jej najważniejszą cechą jest to, że ma tylko jedną stronę, czyli jest tzw. powierzchnią jednostronną. Posiada ona również tylko jeden brzeg (krawędź).



„Wstęga Möbiusa”, Escher, drzeworyt wzdłużny

Escher proponuje odbiorcy swoich dzieł zabawę perspektywą, architekturą i przestrzenią. Dzięki swojej znakomitej wyobraźni tworzył on dzieła, które na pierwszy rzut oka robią wrażenie naturalnych. Jednak przy dokładniejszym przyjrzeniu się im często to, co wydawało się zwyczajne, okazuje się nietypowe – wręcz nierzeczywiste. Prezentując swoje wizje, Escher zawsze kieruje się niezmiennymi zasadami matematyki, które rzadko ludzie

kojarzą z prawami estetyki. Dla niego to właśnie „królowa nauk” jest głównym środkiem do wizualnego przedstawienia własnych wyobrażeń rzeczywistości. Jego sztuka nie wymaga od widza wiedzy matematycznej, ale znajomość rządzących nią reguł pozwala na jej pełny odbiór i na podjęcie próby rozszyfrowania matematycznych inspiracji jego dzieł.

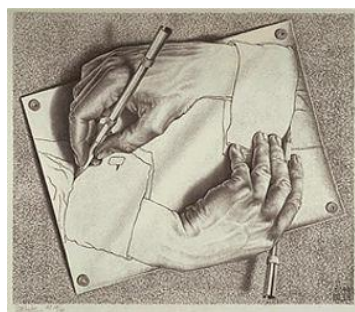
Matematyka w sztuce Eschera

Za „sztukę matematyczną” powszechnie przyjmuje się dzieła, które wykazują matematyczną strukturę i oddziałują matematycznymi skojarzeniami na wyobraźnię matematyków. Grafiki Eschera są przepelnione elementami matematyki, ale nie są to liczby czy równania tak utożsamiane z matematyką przez laików, lecz różnego typu formy oraz struktury płaskie i przestrzenne.

Dorobek Eschera charakteryzuje bogactwo połączenia dwóch nurtów: sztuki ilustrującej matematyczne koncepcje i sztuki, która jest jedynie inspirowana matematyką. Do pierwszej grupy należą niezwyklej urody przedstawienia wielościanów, pierścieni, spiral czy węzłów, a do drugiej – tajemnicze odbicia w niezwyklej lustrzanych taflach. Wszystkie jego obrazy mogą stanowić doskonałą pomoc przy poznawaniu wielu rozmaitych zagadnień matematycznych.



„Węzły”, Escher drzeworyt langowy

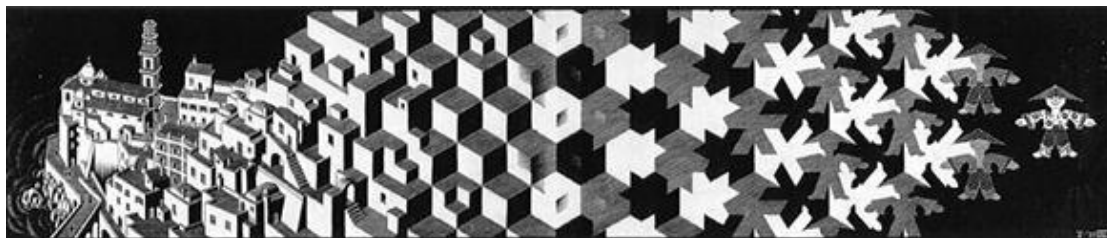


„Rysujące ręce”, Escher, litografia



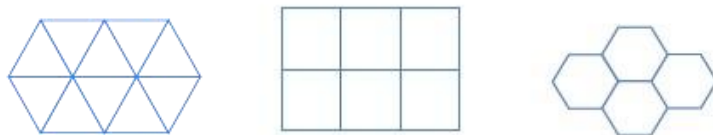
„Ręka z odbiciem w kuli”, Escher, litografia

Ulubionym motywem Eschera są metamorfozy, w których odbiorze łatwo się zagubić. Przyglądając się im, widz traci orientację w przestrzeni, nie wie, gdzie jest ściana, podłoga, a gdzie sufit, co jest wypukłe, a co wklęsłe oraz czym w istocie jest dany kształt. W pracach znajdujemy zachwycające zestawienia przestrzeni i płaszczyzny oraz próby usunięcia granicy między nimi (np. gdy ręka rysuje rękę rysującą tę właśnie rękę – zob. rysunek powyżej).



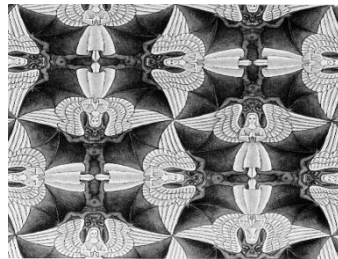
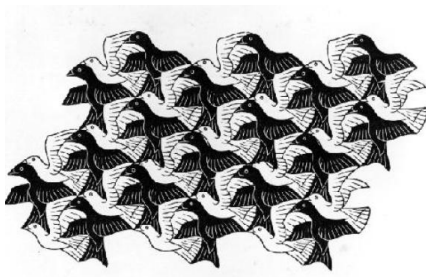
„Metamorfozy”, Escher, drzeworyt wzdłużny

Innym szczególnym obszarem zainteresowań Eschera były tesselacje, czyli parkietaże płaszczyzny lub posadzki. Parkietażem nazywa się pokrycie płaszczyzny takimi wielokątami, które nie zachodzą na siebie. Parkietaż foremny składa się z przystających wielokątów. Każdy z nich jest oznaczany przez tzw. symbol Schläfliego (p, q) , który oznacza, że płaszczyzna pokryta jest wielokątami o p bokach, a w każdym wierzchołku schodzi się q wielokątów.



Przykłady parkietaży złożonych z wielokątów foremnych

Kiedy rozszerzymy definicję parkietażu, dopuszczając w niej figury przystające, które nie są wielokątami, możemy otrzymać poniższe, przykładowe pokrycia płaszczyzny, w przypadku których trudno oprzeć się wrażeniu, że tu zdecydowanie wkracza już sztuka.

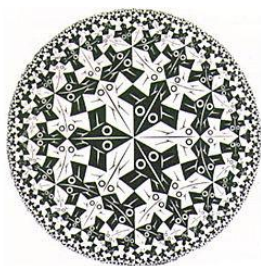


Warto wspomnieć, że mistrzami sztuki wypełniania płaszczyzny powtarzającym się motywem byli już Maurowie, którzy w motywach dekoracyjnych często wykorzystywali mozaiki z figur geometrycznych. Po wizycie w Alhambrze, zafascynowany arabskimi ornamentami, Escher zapełniał odtąd płaszczyznę rybami, gadami, ptakami, pajacami i innymi postaciami o przedziwnych kształtach, a do projektowania tych figur wykorzystywał przekształcenia geometryczne, takie jak: symetria, obroty i translacje. Uzyskiwał w ten sposób bardzo ciekawe wzory, które noszą dziś nazwę parkietaży escherowskich. Mają one płaszczyznę urzekającą magią ornamentu, choć są tylko pochodnymi regularnych pokryć płaszczyzny identycznymi wielokątami.

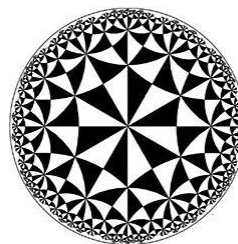
Poincaré, Coxeter i Escher

Do spotkania Harolda Scotta i MacDonalda Coxetera z Escherem doszło na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w 1954 roku. Od tamtej pory panowie często ze sobą korespondowali. Było to wynikiem ogromnego wrażenia, jakie wywarł na Escherze rysunek jednej z prac Coxetera, przedstawiający pokrycie płaszczyzny trójkątami hiperbolicznymi, którego szkic zamieszczony jest poniżej.

Od tego czasu szczególnie zainteresowały Eschera parkietaże koła z motywem malejącym w miarę zbliżania się do brzegu tej figury. Wykorzystując otrzymany od Coxetera rysunek, zrekonstruował siatkę łuków, które następnie stosował do tworzenia interesujących parkietaży płaszczyzny z geometrią nieeuklidesową. Pierwszą tego typu pracą Eschera było dzieło zatytułowane „Granice koła I”.



„Granicie koła I”, Escher, drzeworyt wzdłużny



Coxeter, parkietaż hiperboliczny

Z kolei Henri Poincaré zaproponował następujący model płaszczyzny hiperbolicznej:

- Uniwersum (zbiór wszystkich elementów danego rodzaju) stanowi płaskie koło jednostkowe K bez brzegu;
- „prostymi” są średnice oraz łuki okręgów ortogonalnych do brzegu koła K ;
- izomeriami są symetrie względem średnic, obroty względem środka koła K , inwersje względem okręgów ortogonalnych do brzegu koła K oraz złożenia tych przekształceń.

Model Poincarégo jest konforemny, tzn. odległości euklidesowe są zniekształcone, ale kąty euklidesowe są zachowane. Trójkąt w tym modelu jest figurą, której trzema bokami są fragmenty prostych (łuków okręgów ortogonalnych do brzegu koła lub średnic). Podobnie określa się czworokąt oraz inne wielokąty. W takiej sytuacji suma kątów wewnętrznych każdego trójkąta ma mniej niż 180° .

Grafiki, które są opatrzone tytułem „Granicie koła” stanowią artystyczną wizję modelu Poincarégo płaszczyzny z geometrią Łobaczewskiego. Ukazanie nieskończoności zawartej w skończonym obszarze doskonale oddaje ideę geometrii hiperbolicznej.

Parkietaże Eschera stały się tematem poważnych analiz matematycznych oraz dawały impuls artystom do tworzenia kolejnych „hiperbolicznych” obrazów. Sam Coxeter, oczarowany zawartą w nich matematyczną głębią, poddał je szczegółowej analizie i potwierdził niezwykle matematyczną precyzję, z jaką zostały one wykonane, dokładnie wpisując się w siatkę łuków triangulacji dysku Poincarégo. Grafiki „Granicie koła” I, II i IV bazują na łukach ortogonalnych do brzegu. Natomiast dzieło „Granicie koła” III choć także wykorzystuje łuki okręgów, to jednak nie są one prostopadłe i nie tworzą parkietażu hiperbolicznego. Escher wykorzystał tu ekwidystanty, czyli linie równoodległe od łuków triangulacji ortogonalnej.

Figury niemożliwe

Dla Eschera inspiracją były także prace brytyjskiego fizyka i matematyka Rogera Penrose’a. W wyniku czego zainteresował się również złudzeniami optycznymi i architekturą nierealną. W wielu jego dziełach można odnaleźć podstawowe figury niemożliwe, takie jak niemożliwy trójkąt Penrose’a, niemożliwy sześciąt Neckera czy schody prowadzące donikąd.

Figurę niemożliwą definiuje się jako płaski rysunek, który:

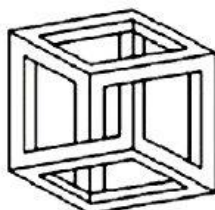
- sprawia wrażenie trójwymiarowości (czyli wygląda jak obiekt przestrzenny);
- sprawia, że nasza interpretacja przestrzenna tego rysunku (domniemanego obiektu przestrzennego) jest niemożliwa do materialnej realizacji, ponieważ

- zawiera wyraźnie widoczne trudności.

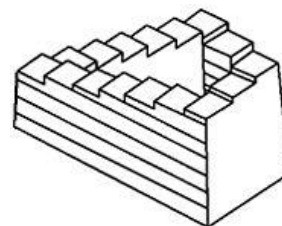
Oto kilka przykładów takich figur.



Trójkąt Penrose'a



Sześcian Neckera



Schody Penrose'a



„Wodospad”, Escher, litografia



„W górę i w dół”, Escher, litografia

Litografia „Waterfall” pokazuje pozorny paradoks, polegający na tym, że woda z podstawy wodospadu wydaje się biec w dół wzdłuż drogi wodnej przed dotarciem na szczyt wodospadu. Natomiast w dziele „W górę i w dół” dostrzegamy duży budynek z dachem o niekończących się schodach, po których w koło wchodzą i schodzą identycznie wyglądające postacie. Choć większość artystów tworzących dzieła dwuwymiarowe wykorzystuje proporcje aby stworzyć iluzję głębi, to Escher jednak używa sprzecznych proporcji tworząc wizualny paradoks.

Efekt Droste'a

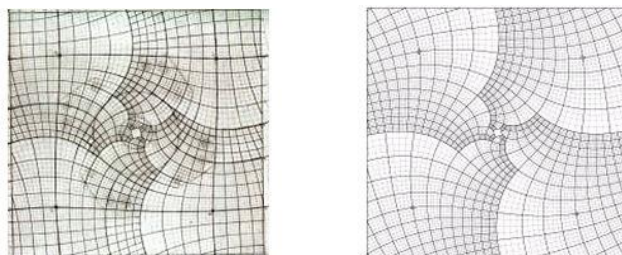
Jednym z najbardziej ciekawych dzieł Eschera jest litografia „Galeria grafiki” (zob. rysunek obok). Przyglądając się jej, zadajemy sobie pytanie, czy można być jednocześnie wewnątrz oraz na zewnątrz obrazu. Młodzieniec spoglądający na obraz w galerii, widzi statek, morze, powiększone miasto, a w nim galerię grafiki, w której odnajduje siebie wpatzonego w morze. Wyjątkową tajemnicą dla wielu badaczy twórczości Eschera okazała się znajdująca się na środku obrazu biała plama.



Obraz ten ma niezwykle interesującą strukturę matematyczną, kojarzącą się z tak zwanym Efektem Droste'a, czyli ze specjalnym rodzajem obrazu rekurencyjnego. Dzieło ukazujące ten efekt zawiera mniejszą wersję samego siebie w miejscu, gdzie podobny powinien się pokazać. Ta mniejsza wersja zawiera jeszcze mniejszą wersję w analogicznym miejscu i tak dalej. Teoretycznie, może się to ciągnąć w nieskończoność, ale praktycznie jest to ograniczone rozdzielczością obrazu, czyli

względnie krótko, ponieważ do opisu występujących w takim dziele zniekształceń wykorzystuje się wykładnicze funkcje zespolone.

Bart de Smit i Hendrik Willem Lenstra zaintrygowali się dziełem Eschera „Galeria grafiki” i dokonali matematycznych symulacji oraz szerszych badań nad tym obrazem. Swoje wyniki przedstawili w pracy „The mathematical structure of Escher’s *Print gallery*”. Na poniższych rysunkach znajdują się dwie siatki. Pierwsza z nich jest siatką obrazu ze szkiców Eschera, a druga, bardzo podobna, jest siatką uzyskaną przez Lenstrę za pomocą funkcji zespolonych.



Na podstawie omówionych przykładów można stwierdzić, że matematyka i sztuki wizualne to tylko pozornie odległe obszary. Przeciętny odbiorca sztuki Eschera, oraz innych twórców „sztuki matematycznej”, często nie uświadamia sobie, że ma do czynienia z pewnymi aspektami matematyki. Można zatem uznać Eschera za prekursora łączenia matematyki i sztuki. Pokazał on, że nawet proste przekształcenia teselacji, symetrii lub obrotów, bez zagłębiania się w wiedzę matematyczną, mogą prowadzić do niesamowitego efektu artystycznego, który zachwyca oko. Współczesne techniki multimedialne otwierają przed wszystkimi drogę do niecodziennej działalności artystycznej. Dlatego wykorzystując szerokie możliwości współczesnych programów komputerowych, można samemu zbudować własną pracownię artystyczną oraz tworzyć własne fantastyczne projekty.

Literatura:

Cobalan F., Złota proporcja. Matematyczny język piękna, RBA, Toruń 2012.

Coxeter H. S. M., Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, Warszawa 1967.

Locher J.L., The E., Magia M.C. Eschera, Solis, Gdańsk 2009.

Pogoda Z., 2002, Escher po polsku, [W:] Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, Ośrodek Kultury Matematycznej w Mordach przy Wyższej Szkole Rolniczo-Pedagogicznej w Siedlcach, Nr 29, Siedlce, 48-49.

Rysunki pochodzą ze strony Internetowej: <http://www.mcescher.com/> (data: 10.03.2013).